Über die Rolle einer indefiniten Zustandsmatrix in der Quantenfeldtheorie

H. P. Dürr

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

(Z. Naturforsch. **28 a**, 346–353 [1973]; eingegangen am 19. Oktober 1972)

Herrn Professor Konrad Bleuler *zum 60. Geburtstag gewidmet*

About the Role of an Indefinite Metric in the State Space of Quantum Field Theory

The necessary extension of the quantum mechanical Hilbert space to a state space with indefinite metric in a local description of quantum electrodynamics, the Yang-Mills theory and a linearized gravitation theory is illustrated. As one of the essential physical consequences of such an extension we emphasize the fact that the interaction cannot be completely represented by the virtual exchange of particles but always does contain non-particle-like "genuine" parts of nonlocal character. In analogy to these cases the indefinite metric in Heisenberg's Lee model and in subcanonical quantum field theories, like Heisenberg's nonlinear spinor theory, is discussed. The physical consequences resulting from a unitarization of these theories with regard to the effective interaction and its causal character are pointed out.

Die Quantentheorie lehrt uns, daß reine physikalische Zustände durch Vektoren in einem komplexwertigen Vektorraum beschrieben werden müssen, für den ein invariantes, positiv definites Skalarprodukt definiert ist, das die Metrik in diesem Zustandsraum festlegt (Hilbert-Raum). Die Forderung der Positiv-Definitheit der Metrik erlaubt, die Gesamtwahrscheinlichkeit für einen Zustand als Summe über positive Übereinstimmungswahrscheinlichkeiten zwischen diesem und einem vollständigen Satz von Basiszuständen zu interpretieren. Eine Abweichung von der Positiv-Definitheits-Eigenschaft der Metrik im quantenmechanischen Zustandsraum scheint deshalb zu einer Verletzung der quantenstatistischen Wahrscheinlichkeitsinterpretation zu führen, die man nicht glaubt tolerieren zu können, ohne das quantenmechanische Gebäude in seinen Fundamenten ernstlich zu gefährden.

Die grundlegenden Arbeiten von Bleuler [1] und Gupta [2] vor über 22 Jahren im Zusammenhang mit ihrem Versuch einer konsistenten manifest kovarianten und lokalen Formulierung der Quantenelektrodynamik haben jedoch zum ersten Mal aufgezeigt, daß diese Forderung abgeschwächt werden kann. Demnach ist es für eine quantenstatistische Interpretation physikalischer Prozesse nur nötig, daß die physikalischen Zustände im asymptotischen Gebiet, also außerhalb des eigentlichen Wechselwirkungsbereichs, Vektoren in einem Hilbert-Raum zugeordnet sind. In diesem Fall läßt sich nämlich, wie üblich, eine unitäre Streumatrix definieren, welche alle möglichen Ergebnisse von Messungen an einem physikalischen System beinhaltet und die Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit garantiert.

Die Möglichkeit, die Hilbert-Raumstruktur gerade im Wechselwirkungsbereich „aufweichen" zu können, erscheint jedoch für eine dynamische Theorie der Elementarteilchen von besonderem Interesse in Anbetracht der bekannten großen Schwierigkeiten, die dort bei einer quantenfeldtheoretischen Beschreibung durch die Ultraviolettdivergenzen auftreten. Es liegt nahe, den von Bleuler und Gupta aufgezeigten Weg weiter auszubauen und zu versuchen, diese Schwierigkeiten dadurch zu umgehen, daß man eine wechselwirkende Quantenfeldtheorie im Rahmen eines erweiterten Zustandsraums mit indefiniter Metrik entwickelt. Um die physikalische Interpretierbarkeit solcher Theorien zu sichern, müßte man dafür sorgen, daß alle asymptotisch realisierten physikalischen Zustände Elemente eines invarianten Unterraums mit positiv definiter Metrik sind und durch eine unitäre S-Matrix miteinander verknüpft werden können. Die physikalisch interpretierbaren Zustände bilden in diesem Fall dann kein vollständiges System von Zuständen mehr. Im Wechselwirkungsbereich würden diese Zustände im allgemeinen aus dem physikalischen Zustandsraum „herausgedreht"; sie erhielten „unphysikalische" Komponenten, d. h. einen Charakter, der nicht mehr durch die Sprechweise „virtueller physikalischer Zustände" erfaßt werden könnte. Wesentlich ist, daß „unphysikalische" Zustände auch mit „negativer Wahrscheinlichkeit" auftreten können. Im Gegensatz zu virtuellen physikalischen Zuständen kann deshalb ihr Beitrag zur Wechselwirkung „subtraktiv" sein, was zu einer effektiven Abschwächung der Wechselwirkung und zu einer Vermeidung der berüchtigten Divergenzen führt.

Untersuchungen [3] in dieser Richtung haben gezeigt, daß es im allgemeinen nicht schwer ist, durch eine geeignete Projektionsvorschrift in dem erweiterten Zustandsraum einen invarianten Unterraum mit positiver Metrik zu konstruieren. Die Frage ist dabei mehr, ob dieser Unterraum für eine Darstellung aller physikalisch realisierbaren Zustände geeignet und seine Auswahl eindeutig ist. In den Eichtheorien, in denen nach dem Vorbild von Bleuler und Gupta die Erweiterung des Zustandsraums mit Erfolg angewendet wurde, gelingt die Konstruktion des physikalischen Zustandsraums nach einem durchsichtigen Muster [4]. Wir wollen dies zunächst am bekannten Beispiel der Quantenelektrodynamik aufzeigen.

Gupta-Bleuler-Quantenelektrodynamik

Gruppentheoretisch läßt sich die Quantenelektrodynamik als eine lokale Quantenfeldtheorie masseloser Teilchen vom Spin eins mit Fermi-Teilchen endlicher Masse und Spin 1/2 beschreiben. Charakteristisch für Masse-Null-Felder ist, daß die den Einteilchensystemen zugeordneten irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe alle eindimensional sind. Dies führt dazu, daß „asymptotisch" nur die transversal polarisierten Photonen (rechtszirkular polarisierte Photonen und ihre linkszirkular polarisierten Antiteilchen) auftreten dürfen. Andererseits enthält die Bewegungsgleichung in ihrer manifest kovarianten und lokalen Form das 4-komponentige eichabhängige Vektorpotential $A_\mu(x)$ als lokalen Feldoperator. Dieses „Hilfsfeld" erzeugt aus dem Vakuum neben den physikalischen, transversal polarisierten Teilchen auch noch unphysikalische, longitudinale und skalare „Photonen". Die skalaren Photonen haben negative Norm, sie sind normierbare Geister. Das lokale Vektorfeld $A_\mu(x)$ muß deshalb als ein linearer Operator in einem Zustandsraum mit indefiniter Metrik aufgefaßt werden. Der Zustandsraum hat noch eine relativ einfache Struktur, die sich als Differenz zweier Hilbert-Räume beschreiben läßt. Wir wollen ihn kurz Nevanlinna-Raum nennen.

Um die Theorie physikalisch interpretieren zu können, muß durch geeignete Randbedingungen erreicht werden, daß asymptotisch keine Geister auftreten, welche die Wahrscheinlichkeitsdeutung stören würden. Durch „Addition" und „Subtraktion" der positiv normierten, longitudinalen und negativ normierten, skalaren „Photonen" bildet man hierfür zunächst ein Paar von nicht-orthogonalen Norm-Null-Zuständen, einem „guten" und einem „schlechten" Geist. Als Randbedingung für die einlaufenden physikalischen Zustände fordert man nun, daß sie keine „schlechten" Geister enthalten dürfen. Durch diese Forderung wird die Lorentz-Bedingung für alle Matrixelemente erzwungen. Eine Beimischung von „guten" Geistern wird durch die Randbedingung nicht eingeschränkt. Aufgrund der Stromerhaltung stellt man fest, daß auf der Massenschale „schlechte" Geister durch die Wechselwirkung nicht erzeugt und „gute" Geister nicht vernichtet werden können. Die auslaufenden physikalischen Zustände enthalten deshalb ebenfalls keine „schlechten" Geister und die einlaufenden „guten" Geister verhalten sich wie freie Teilchen. Die asymptotischen Zustände liegen deshalb alle in dem positiv-semidefiniten Zustandsraum ohne „schlechte" Geister. Da die „guten" Geister die Norm Null haben, tragen jedoch Zustände, die „gute" Geister enthalten, zu den physikalischen Übergangsamplituden nichts bei. Die verschiedenartige Beimischung von guten Geistern entspricht einer Umeichung des Vektorpotentials innerhalb der Lorentz-Eichung. Die Wahrscheinlichkeit für die verbleibenden Übergänge zwischen physikalischen Zuständen ist deshalb positiv definit. Virtuell können jedoch böse Geister erzeugt werden. Ihr Austausch führt zur Coulomb-Wechselwirkung. Die bei der nicht kovarianten Coulomb-Eichung unmittelbar auftretende nicht-quantisierte, nichtlokale, nichtretardierte Coulomb-Wechselwirkung erscheint also bei der kovarianten Gupta-Bleuler-Formulierung im Nevanlinna-Raum als Folge eines Austauschs von Geistern.

Am Beispiel der Gupta-Bleuler-Quantenelektrodynamik erkennen wir einen wesentlichen Zug von Quantenfeldtheorien mit indefiniter Metrik. Eine lokale Wechselwirkung im erweiterten Zustandsraum erscheint vom Standpunkt des physikalischen Hilbert-Raums aus als eine komplizierte Wechselwirkung, die sich zusammensetzt aus einer „teilchenartigen" Wechselwirkung, d. h. einer Wechselwirkung, die durch den virtuellen Austausch asymptotisch auftretender Teilchen erzeugt wird, und einer „genuinen" Wechselwirkung, die als klassische, nichtlokale Fernwechselwirkung auftritt und nicht mit physikalischen Teilchenzuständen verknüpft werden kann. Da sie keinen Teilchen zugeordnet ist, kann sie zur Signalisierung nicht verwendet werden. Die Nichtlokalität bewirkt deshalb keine Verletzung der Einstein-Kausalität. Erweitern wir den Hilbert-Raum zum Nevanlinna-Raum, so wird den genuinen Fernkräften künstlich Quantencharakter zugeordnet und wir erreichen formal ein Vereinheitlichung der Wechselwirkungssprache, in der sich die Operatoren wieder als kovariante lokale Operatoren schreiben und die unitären Symmetrieoperationen auf übliche Weise ausführen lassen. Der physikalische Sachverhalt wird allerdings durch diesen formalen Kunstgriff verschleiert.

Die allgemeine Situation erinnert vielleicht in gewisser Hinsicht an die Situation bei der Beschreibung von Streuzuständen: Formal erweist es sich dort als vorteilhaft, den physikalischen Bereich auf komplexe Energien oder komplexe Drehimpulse zu erweitern, da in dieser Sprache Resonanzzustände, trotz ihres prinzipiell anderen physikalischen Charakters, ähnlich wie Bindungszustände behandelt werden können. Ihre „unphysikalische" Komponente (z. B. der Imaginärteil der Energie) ergibt ein Maß für die „Massenbreite" im physikalischen Bereich.

Die manifest kovariante und lokale Formulierung der Quantenelektrodynamik erfordert nur eine recht harmlose Erweiterung des quantenmechanischen Zustandsraums. Die Einfachheit der Verhältnisse rührt hierbei wesentlich von dem Umstand her, daß $\partial_\mu A^\mu$ aufgrund der Kontinuitätsgleichung einer freien Gleichung genügt. Diese einfachen Verhältnisse werden gestört, wenn man versucht, die komplizierteren Theorien mit nicht-abelschen Eichgruppen, wie die Yang-Mills-Theorie oder die Gravitationstheorie, nach demselben Verfahren zu behandeln. In diesen Theorien sind die Masse-Null-Zustände selbst „geladen", d. h. an sich selbst gekoppelt. Diese Theorien sind deshalb auch ohne Quellfelder nicht wechselwirkungsfrei. Es treten automatisch nichtlineare Feldkopplungen auf.

Yang-Mills-Theorie

In der Isopin-Yang-Mills-Theorie [5] gibt es drei Vektorfelder $B_\mu(x)$, die sich unter Isospintransformationen wie die Komponenten eines Isovektors verhalten. Jeweils die transversalen Komponenten können wieder physikalischen Teilchen zugeordnet werden. Die unphysikalischen dynamischen Freiheitsgrade lassen sich in drei Geisterpaare von nicht-orthogonalen „guten" und „schlechten" Geistern anordnen. Für die physikalischen Prozesse fordert man als Randbedingung, daß einlaufende Zustände keine „schlechten" Geister enthalten dürfen. Im Gegensatz zur Quantenelektrodynamik stellt man nun aber fest, daß aufgrund der Selbstwechselwirkung „schlechte" Geister erzeugt werden können. Dies liegt daran, daß die Stromerhaltung in diesen Theorien nicht mehr manifest, sondern erst nach Berücksichtigung einer Lorentz-artigen Nebenbedingung etabliert werden kann. Die auslaufenden Zustände liegen deshalb im allgemeinen nicht mehr im physikalischen Zustandsraum. Charakteristisch für solche, die Unitarität der S-Matrix verletzenden Prozesse ist die Erzeugung eines Paares aus einem „guten" und einem „schlechten" Geist durch ein physikalisches Teilchen. Um diese Prozesse zu unterdrücken, ist man gezwungen, in die Theorie sechs weitere dynamische Freiheitsgrade in Form eines nichthermiteschen skalaren Isovektorfeldes $\vec{\sigma}(x) \neq \vec{\sigma}^*(x)$ einzuführen. Pathologisch an diesem Isovektorfeld ist, daß es mit Antivertauschungsrelationen quantisiert werden muß, was gewöhnlich nur bei Spinorfeldern vorkommt. „Falsche" Vertauschungsrelationen bedeuten, daß die durch diese Felder erzeugten Teilchen und Antiteilchen entgegengesetzte Norm haben [5]. Dieses skalare Feld muß nun an das Eichfeld so angekoppelt werden, daß ein physikalisches Vektorteilchen ein Teilchen-Antiteilchenpaar auf solche Weise erzeugt, daß der konkurrierende Effekt der Erzeugung eines „guten-schlechten" Geisterpaars gerade kompensiert wird.

Gravitationstheorie

In der Gravitationstheorie [6] liegen die Verhältnisse ähnlich wie bei der Yang-Mills-Theorie. Man beginnt zunächst mit den 10 Feldkomponenten eines symmetrischen Tensors $\varphi_{(\mu\nu)}$, der zwei physikalische Zustände und acht unphysikalische Zustände aus dem Vakuum erzeugt. Die acht unphysikalischen Zustände, von denen vier positive und vier negative Norm haben, lassen sich wieder in vier Geisterpaare von „guten" und „schlechten" Geistern anordnen. Durch eine aus der deDonder-Bedingung abgeleiteten und der Lorentz-Bedingung in der Elektrodynamik analogen Nebenbedingung werden dann die einlaufenden Zustände eingeschränkt auf Zustände, die keine „schlechten" Geister enthalten. Die willkürliche Beimischung der „guten" Geister hängt mit den Eichfreiheitsgraden zusammen, die geometrisch durch die beliebige Wahl der Koordinatensysteme zum Ausdruck kommt. Die Unterdrückung der „schlechten“ Geister im auslaufenden Zustandsraum läßt sich nur erreichen, indem man noch zusätzlich ein nichthermitesches Vektorfeld (also acht weitere Feldkomponenten) einführt, das mit Antivertauschungsrelationen quantisiert wird. Der virtuelle Austausch von „schlechten“ Geistern führt u. a. zur Newtonschen Gravitationswechselwirkung. Wegen der komplizierten Raum-Zeitstruktur der Gravitationstheorie treten selbstverständlich gegenüber der Yang-Mills-Theorie weitere Interpretationsschwierigkeiten auf, die hier nicht weiter besprochen werden sollen.

Die Beschäftigung mit Eichtheorien lehrt uns, daß die Erweiterung des Zustandsraums zu einem Nevanlinna-Raum dann notwendig wird, wenn wir auf einer manifest kovarianten und lokalen Formulierung der Quantenfeldtheorie bestehen. Eine solche Formulierung gelingt allerdings nur bei gleichzeitiger Einschränkung der Eichtransformationen, z. B. auf die Lorentz-Eichung in der Quantenelektrodynamik und die deDonder-Hilbert-Eichung in der Gravitationstheorie. Der physikalische Hilbert-Raum reicht für die Formulierung der Quantenelektrodynamik nur aus, wenn man die nicht-kovariante Coulomb-Eichung verwendet, wobei jedoch gleichzeitig die lokale Eigenschaft der (transversalen) Feldoperatoren und der Wechselwirkung verlorengeht. Einer lokalen Quantenfeldtheorie im Nevanlinna-Raum entspricht also in diesem Fall eine nichtlokale, aber Einstein-kausale Theorie im physikalischen Zustandsraum.

Mandelstams wegabhängige Feldoperatoren

Eine interessante Alternative für die Formulierung von Eichtheorien ist die hauptsächlich von Mandelstam [7] propagierte und ausgearbeitete Theorie, in der auf die Einführung der physikalisch nicht eindeutig festgelegten, eichabhängigen Vektorpotentiale bzw. die mit dem metrischen Raumzeittensor unmittelbar zusammenhängenden Gravitationsfelder ganz verzichtet wird und stattdessen vom Weg P abhängige, eichinvariante Feldoperatoren $\psi(x, P)$ eingeführt werden. Über die Wegabhängigkeit dieser Operatoren, die bei einer „Phasenkrümmung“ $F_{\mu\nu}$, einer „Isospinkrümmung“ $G_{\mu\nu}$ oder einer Raumzeitkrümmung $R_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ explizit in Erscheinung tritt, geht die physikalische Wirkung des elektromagnetischen Feldes, des Yang-Mills-Feldes oder des Gravitationsfeldes indirekt ein. Anschaulich kommt die Wegabhängigkeit der Felder in dem von Aharonov und Bohm [8] vorgeschlagenen Experiment unmittelbar zum Ausdruck. Gerade dieses Experiment zeigt, daß wir es hierbei mit einem nur von der Quantenmechanik her verständlichen, nichtlokalen Effekt zu tun haben, der jedoch zu keinem im üblichen Sinne akausalen Verhalten führt. Vom Standpunkt des Mandelstamschen eichinvarianten, wegabhängigen Operatorformalismus aus wird die Erweiterung des physikalischen Zustandsraums und die Einschränkung der zugelassenen Eichtransformationen erst notwendig, wenn man versucht, die wegabhängigen Felder durch wegunabhängige lokale Hilfsfelder auszudrücken.

Nach diesem Exkurs in die Eichtheorien und der Diskussion der dort auftretenden Zustandsraumstrukturen wollen wir uns jetzt unserer eigentlichen Frage wieder zuwenden, inwieweit man hoffen kann, durch eine Erweiterung des Zustandsraums das Divergenzproblem lokaler Quantenfeldtheorien lösen zu können. Es erscheint ziemlich wahrscheinlich, daß dazu tiefgreifendere Maßnahmen als bei den Eichtheorien erforderlich sind. Immerhin scheinen sich gewisse Parallelen abzuzeichnen.

Subkanonische Quantisierung

Heisenberg [9] hat schon zu einem recht frühen Zeitpunkt darauf aufmerksam gemacht, daß die kanonische Quantisierungsvorschrift für lokale Felder möglicherweise nur für freie Felder konsistent gefordert werden kann, da sie sich dort aus der linearen Feldgleichung und der Lokalitätseigenschaft der Felder (raumartige Vertauschbarkeit) ableiten läßt. In heutiger Sprechweise würde dies bedeuten, daß nur freie Felder exakt die kanonische eingeprägte Massendimension (inverse Längendimension) haben, die für Spinorfelder $+3/2$ und für Bose-Felder $+1$ ist. Jegliche echte Wechselwirkung sollte eine Abweichung von der kanonischen Dimension erzwingen. Fordert man, wie gewöhnlich, einen Zustandsraum mit positiv definiter Metrik, so kann sich die Massendimension der Felder nur erhöhen, was zur Folge hat, daß die wechselwirkenden Felder bei kleinen Abständen sich singulärer als die kanonischen verhalten. Das Divergenzproblem wird deshalb verschärft und nicht beseitigt. Das Divergenzproblem kann nur entschärft werden, wenn man annimmt, daß die Felder durch die Wechselwirkung eine kleinere Massendimension bekommen (subkanonische Felder). Dies ist genau Heisenbergs Vorschlag. Eine notwendige Konsequenz davon ist allerdings, daß solche Felder lineare Operatoren in einem Zustandsraum mit indefiniter Metrik sein müssen. Da die kanonische Beschreibung eng mit dem Teilchenaspekt der Felder verknüpft ist, würde dies insbesondere bedeuten, daß die Teilchensprache für den Wechselwirkungsbereich unangemessen ist. Der Teilchenbegriff erwiese sich in gewisser Hinsicht als inkompatibel zum Begriff lokaler Wechselwirkung. Formal kommt dies dadurch zum Ausdruck, daß – ähnlich wie bei der lokalen Formulierung der Eichtheorien – im Wechselwirkungsbereich unphysikalische Freiheitsgrade eine dominante Rolle spielen. Physikalisch würden sich diese Freiheitsgrade als eine genuine, nicht-teilchenartige Wechselwirkung bemerkbar machen.

Heisenbergs Lee-Modell

Als Paradebeispiel für eine Quantenfeldtheorie mit regularisierender indefiniter Metrik kann das Lee-Modell in der Heisenbergschen Fassung dienen [10]. Durch die Annahme einer nicht streng lokalen Wechselwirkung limitiert man die mögliche Wechselwirkung im Lee-Modell auf die wechselseitige Umwandlung eines V-Teilchens in ein System von einem N- und einem Θ-Teilchen: $\mathrm{V} \rightleftarrows \mathrm{N} + \Theta$. Für das nackte V-Teilchen postuliert man eine negative Norm. Durch die Wechselwirkung wird daraus ein angezogenes V-Teilchen negativer Norm V_-. Außerdem entsteht ein V-ähnlicher $\mathrm{N}\Theta$-Bindungszustand V_+ mit positiver Norm. In der Heisenbergschen Fassung läßt man diese beiden Zustände energetisch zusammenfallen, so daß in der *S-M*atrix ein Doppelpol auftritt. Dieser Doppelpol-Zustand entspricht wieder einem Geisterpaar aus einem „guten" und einem „schlechten" Geist, d. h. zwei nicht-orthogonalen Norm-Null-Zuständen. Der „schlechte" Geist, ein sog. Dipolgeist, ist im Gegensatz zum „guten" Geist kein Eigenzustand der Energie mehr. Der Zustandsraum läßt sich in diesem Fall nicht mehr als Differenz zweier Hilbert-Räume schreiben (kein Nevanlinna-Raum).

Ähnlich wie in den Eichtheorien wird der Zustandsraum der einlaufenden physikalischen Zustände durch eine invariante Projektionsvorschrift definiert, hier durch die Vorschrift, daß physikalische Zustände Energie-Eigenzustände sein müssen. Dadurch werden wenigstens in Sektoren, die maximal nur ein V-Teilchen enthalten, also etwa im Sektor $\mathrm{V}\Theta \rightleftarrows \mathrm{N}\Theta\Theta$, Zustände mit „schlechten" Geistern ausgeschlossen. Wie bei nicht-abelschen Eichtheorien stellt man aber fest, daß die „schlechten" Geister durch die Wechselwirkung erzeugt werden können. Durch eine ganz spezielle Beimischung der „guten" Geister im Eingangskanal läßt sich jedoch erreichen, daß auch die auslaufenden Zustände keine „schlechten "Geister mehr enthalten. Die Beimischung der „guten" Geister im Ausgangskanal ist hierbei im allgemeinen von der Beimischung im Eingangskanal verschieden. Der ein- und auslaufende physikalische Zustandsraum ist deshalb nicht identisch. Trotzdem kommt man zu einer unitären *S*-Matrix, da wegen der verschwindenden Norm der „guten" Geister letztlich nur die normierbaren physikalischen Zustände eingehen. Im Gegensatz zu den Eichtheorien, in denen die „guten" Geister mit den Eichfreiheitsgraden zusammenhängen, spielen die „guten" Geister im Lee-Modell beim Unitarisierungsprozeß eine entscheidende Rolle. (Es wäre vielleicht interessant einmal nachzusehen, ob sich in nichtabelschen Theorien die „guten" Geister nicht auch ähnlich zur Unitarisierung einspannen ließen, wodurch die oben beschriebenen zusätzlichen skalaren bzw. vektoriellen Fermi-Felder überflüssig würden.)

Karowski [11] hat weiterhin gezeigt, daß das auf diese Weise unitarisierte Lee-Modell mit Doppelpol-V-Teilchen im $\mathrm{V}\Theta \rightleftarrows \mathrm{N}\Theta\Theta$-Sektor einer Hilbert-Raumtheorie äquivalent ist, in der die N- und Θ-Zustände über eine nichtlokale, separable $\mathrm{N}\Theta - \mathrm{N}\Theta$-Kopplung direkt miteinander wechselwirken. Auch das V-Teilchen geht in dieser Hilbert-Raum-Formulierung nicht völlig unter. Es tritt als ein normiertes, aber von den anderen Teilchen vollig entkoppeltes Teilchen formal in Erscheinung.

Unitarisierung und Analytizität

Die oben skizzierte Unitarisierung funktioniert nicht mehr, wenn man, wie in der Pauli-Kållen-Fassung [12] des Lee-Modells, die V_-- und V_+-Pole nicht zu einem Doppelpol fusioniert. Doch auch für diesen „hoffnungslosen" Fall läßt sich ein Unitarisierungsverfahren angeben [3, 13]. Dieses Verfahren ist allerdings wesentlich brutaler. Es hat den praktischen Vorzug, daß es sich anscheinend ohne Schwierigkeiten auf beliebige Quantenfeldtheorien verallgemeinern läßt, was etwas unbehaglich ist. Ein wesentlicher Nachteil liegt darin, daß dieses Verfahren weniger in einem allgemeinen Prinzip als in einem Manipulationsrezept besteht, das auf Feynmangraphen angewendet werden kann. Auch scheint diese Methode noch verschiedenartige, vermutlich gleichberechtigte Modifikationen der Unitarisierung zuzulassen, die, bei gleichem Ausgangspunkt, zu jeweils verschiedenen physikalischen Theorien führen. SUDARSHAN et al.[14] haben in letzter Zeit versucht, mit dem Begriff der „Schattenzustände“ dieser Methode eine grundlegendere Deutung zu geben. Interessant erscheint diese Methode insbesondere deshalb, weil sie erlaubt, dynamisch bisher völlig unzugängliche Theorien (wie z. B. die Klasse der nichtrenormierbaren Quantenfeldtheorien) in eine Form zu bringen, die vernünftige physikalische Aussagen erlauben, ohne dafür einen für die Physik unakzeptabel hohen Preis zu bezahlen. Wir wollen diese Methode gleich am Beispiel einer wechselwirkenden lokalen Feldtheorie diskutieren.

Wir betrachten der Einfachheit halber ein selbstwechselwirkendes skalares Feld $\Phi(x)$, das der Bewegungsgleichung

$$\Box\, \Phi(x) + g : \Phi^3 : (x) = 0$$

genügt. Bei üblicher Betrachtungsweise führt dies auf eine renormierbare Theorie. In unserem Fall soll nun aber Φ ein linearer Operator in einem Nevanlinna-Raum sein. Konkret wollen wir annehmen, daß Φ bei Anwendung auf einen Vakuumzustand nicht nur physikalische Teilchen der Masse m, sondern auch normierte Geister der Masse μ erzeugt. Sind in der Zweipunktfunktion die statistischen Gewichte von Teilchen und Geistern entgegengesetzt gleich, so fallen für kleine Abstände die singulärsten Anteile heraus. Die Propagatorfunktion fällt im Impulsraum für große Impulse p stärker als gewöhnlich, nämlich wie $(p^2)^{-2}$ ab, was zu einer stärkeren Konvergenz aller Feynmanintegrale führt. Die Felder haben die subkanonische Massendimension Null und die Theorie wird superrenormierbar, also frei von jeglichen Divergenzen.

In den von dieser Theorie beschriebenen Streuprozessen treten nun allerdings im allgemeinen neben den physikalischen Teilchen auch die Geister als Endzustände auf, selbst wenn man die einlaufenden Zustände auf die physikalischen Zustände einschränkt. Die Geistererzeugung geschieht mit einer „negativen Wahrscheinlichkeit“. Sie hängt über einer „Pseudounitaritätsrelation“, welche immer noch eine Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit gewährleistet, mit einem entsprechenden negativen Imaginärteil der Streuamplitude zusammen.

Um zu einer im üblichen Sinne unitären Theorie zu kommen, werden nun im Endkanal kurzerhand alle Geistererzeugungsprozesse weggestrichen. Gleichzeitig muß man durch weitere Eingriffe jedoch dafür sorgen, daß auch die zugehörigen Imaginärteile in den Streuamplituden unterdrückt werden. Dies kann nur dadurch geschehen, daß man die globale Analytizität der Streuamplituden aufgibt: Die Riemannsche Fläche der Streuamplituden in der komplexen Energieebene wird an den Schwellen der unphysikalischen Schnitte auseinandergetrennt und so zusammengestückelt, daß die unphysikalischen Schnitte mit ihren Imaginärteilen nicht mehr auftreten. In dem hier betrachteten Fall muß z. B. der in der Streuamplitude zweier physikalischer Teilchen der Masse m auftretende und bei der Energie $E_0 = m + \mu$ beginnende unphysikalische Schnitt, welcher der Erzeugung eines m-Teilchens und eines μ-Geistes zugeordnet ist, beseitigt werden. Die unphysikalische Schwelle wird bei dieser Prozedur durch einen „nichtanalytischen Punkt“ an gleicher Stelle ersetzt.

Es ist verständlich, daß ein so grober Eingriff in die analytische Struktur der Streuamplituden nicht ohne Konsequenzen für die daraus resultierende Physik bleiben kann. In der Tat kann man leicht zeigen[13], daß die Nichtanalytizität der Streuamplituden an den unterdrückten unphysikalischen Schwellen zu nichtlokalen Effekten führt. Besonders offensichtlich wird dieser Effekt, wenn die nichtanalytischen Punkte in den physikalischen Bereich fallen, in unserem obigen Beispiel also, wenn $\mu > m$ ist. Ein bei E_0 gestreutes Wellenpaket bekommt dann nach der Streuung nicht nur retardierte, sondern auch avancierte Flanken, die nach einem Potenzgesetz abfallen. Der Streuvorgang sieht also so aus, als ob zu der eigentlichen Wechselwirkung noch zusätzlich eine nichtlokale und nur bei dieser speziellen Energie wirksame Wechselwirkung hinzugekommen wäre, die mit einer gewissen Potenz des inversen Abstands abfällt. Das Potenzverhalten wird stärker, die Nichtlokalität also schwächer, wenn die Streuamplituden am nichtanalytischen Punkt stetiger werden. Die Stetigkeitseigenschaften der Streuamplitude am nichtanalytischen Punkt entsprechen den Stetigkeitseigenschaften an der unphysikalischen Schwelle, die durch den Drehimpuls und den Phasenraumfaktor im unterdrückten Kanal bestimmt werden. So führt die Unterdrückung eines *S*-Wellen-Zweiteilchenkanals zu den stärksten Nichtlokalitäten.

Unitarisierung von Theorien mit Geisterdipolen

Unitarisiert man Theorien mit Geisterdipolen nach der eben beschriebenen Methode, so werden die nichtlokalen Effekte noch stärker. Man kann jedoch in diesem Fall die im Heisenbergschen Lee-Modell verwendete raffiniertere Unitarisierungsmethode anwenden, bei der die Geisterdipole im Ausgangskanal nicht durch Projektion, sondern durch eine geeignete Beimischung der harmlosen „guten" Geister zu den physikalischen Zuständen im Eingangskanal unterdrückt werden [15]. Man kann leicht einsehen, daß bei diesem Verfahren die Analytizität im physikalischen Bereich nie verletzt werden kann. Da die Unitarisierung kanalabhängig ist, können jedoch die unitarisierten Amplituden im „gekreuzten" Kanal nicht mehr durch analytische Fortsetzung aus den unitarisierten Amplituden im ursprünglichen Kanal gewonnen werden. Nur für die nichtunitarisierten Amplituden bestehen noch die üblichen Kreuzungsrelationen, was ausreicht, um wieder einen eindeutigen Zusammenhang zwischen gekreuzten Prozessen herstellen zu können. Es muß zukünftigen Untersuchungen vorbehalten bleiben, die physikalischen Konsequenzen dieser neuartigen Verknüpfung aufzudecken. Es erscheint jedoch wahrscheinlich, daß sich daraus keine drastischen Änderungen gegenüber den üblichen Resultaten ergeben. Vermutlich werden die Abweichungen in zusätzlichen Kräften bestehen, die schlimmstenfalls zu nichtlokalen Effekten vom exponentiellen Typ führen könnten, also zu wesentlich harmloseren Effekten als bei der brutalen Unitarisierung. Inwieweit mögliche nichtlokale Effekte als Aufweichung der Einstein-Kausalität gedeutet werden müssen, bleibt zunächst ebenfalls offen, da nicht klar ist, inwieweit zeitliche „Vorläufer" für eine Signalübermittlung geeignet sind. Auch die nichtlokale, nicht-retardierte Coulomb-Wechselwirkung führt ja durch ihr raffiniertes Zusammenspiel mit den nichtlokalen Transversalkomponenten des elektromagnetischen Feldes zu keiner Verletzung der Einstein-Kausalität.

Ausblick

Die angeführten Beispiele sollten zeigen, daß eine Erweiterung des physikalischen Hilbert-Raums in Zustandsräume mit indefiniter Metrik sehr wohl ein geeignetes Mittel sein kann, um zu einer widerspruchsfreien, lokalen, physikalisch interpretierbaren, wechselwirkenden Quantenfeldtheorie zu gelangen. Der Hauptvorzug dieses Weges besteht darin, daß man Poincaré-Invarianz und Kausalität in manifester Form auf konventionelle Weise einbauen kann. Es lassen sich deshalb vielfach die in solchen Theorien üblichen Methoden und Rechenverfahren, z. B. Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von Green-Funktionen, ohne Änderung übernehmen. Abweichungen von diesen Verfahren ergeben sich meist erst im letzten Schritt durch die Unitarisierung der Streuamplituden. Ein Nachteil dieser Verfahrensweise besteht zweifellos darin, daß der eigentliche physikalische Sachverhalt etwas verschleiert wird, der doch darin zu bestehen scheint, daß der Wechselwirkungsbegriff nicht so eng mit dem Teilchenbegriff verknüpft ist, wie man dies – vielleicht durch unsere bevorzugte Beschäftigung mit der starken Wechselwirkung – anzunehmen gewöhnt ist. Durch einen Wust von unphysikalischen Freiheitsgraden, die durch raffinierte Projektions- oder Kompensationsvorschriften an einer asymptotischen Realisation gehindert werden, wird eine an sich teilchenfremde Wechselwirkung künstlich in das Korsett der Teilchensprache eingezwängt. So wie bei den Eichtheorien der Mandelstamsche Vorschlag der wegabhängigen Felder zu einer begrifflichen und formalen, wenn auch nicht praktischen Vereinfachung geführt hat, so gibt es vielleicht auch später bei den Feldtheorien mit regularisierender indefiniter Metrik eine geeignetere Sprechweise, die uns erlauben könnte, auf eine Erweiterung des Zustandsraums zu verzichten. Es ist zu vermuten, daß bei einer solchen Neufassung die lokalen Aspekte einer Feldtheorie in einer ungewöhnlichen Form erscheinen müssen. Ganz ungeachtet solcher Möglichkeiten, für die im Augenblick kaum Ansätze existieren, könnte sich aber herausstellen, daß für eine praktische Behandlung von feldtheoretischen Problemen eine lokale Formulierung in einem erweiterten Zustandsraum mit indefiniter Metrik sich am geeignetsten erweist, ähnlich wie sich auch in der Quantenelektrodynamik die Gupta-Bleuler-Formulierung für praktische Rechnungen im Vergleich zu anderen Formulierungen am besten bewährt hat.

1 K. Bleuler, Helv. Phys. Acta **23**, 567 [1950].
2 S. N. Gupta, Proc. Phys. Soc. London **A 63**, 681 [1950].

[3] F. C. G. SUDARSHAN, Phys. Rev. **123**, 2183 [1961]. Eine Diskussion älterer Arbeiten über indefinite Metrik wird in dem Buch gegeben: K. L. NAGY: State Vector Spaces with Indefinite Metric in Quantum Field Theory. Académiai Kiadó, Budapest 1965.
[4] H. P. DÜRR u. E. RUDOLPH, Nuovo Cim. **62**, 411 [1969]; **65**, 423 [1970]; E. RUDOLPH, Diplomarbeit München 1967.
[5] C. N. YANG u. R. L. MILLS, Phys. Rev. **96**, 191 [1954]; R. UTIYAMA, Phys. Rev. **101**, 1597 [1956]; E. RUDOLPH, Doktorarbeit München 1970; E. RUDOLPH u. H. P. DÜRR, Gupta-Bleuler Formalism with Scalar Fermions in Massless Yang-Mills Theory, Nuovo Cim. **10 A**, 597 [1972].
[6] R. P. FEYNMAN, Acta Phys. Polon. **24**, 697 [1963]; B. S. DE WITT, Phys. Rev. **162**, 1195, 1239 [1967]; **171**, 1834 E [1968]; L. D. FADEEV u. V. N. POPOV, Phys. Lett. **25 B**, 29 [1967].
[7] S. MANDELSTAM, Ann. Phys. **19**, 1, 225 [1962]; Phys. Rev. **175**, 1580, 1604 [1968].
[8] Y. AHARONOV u. D. BOHM, Phys. Rev. **115**, 485 [1959].
[9] W. HEISENBERG, Z. Naturforsch. **9 a**, 292 [1954].
[10] T. D. LEE, Phys. Rev. **95**, 1329 [1954]; W. HEISENBERG, Z. Phys. **144**, 1 [1956]; Nucl. Phys. **4**, 532 [1957]; **5**, 195 [1958].
[11] M. KAROWSKI, Z. Naturforsch. **24 a**, 510 [1969].
[12] G. KÄLLEN u. W. PAULI, Kong. Dansk Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd. **30**, No. 7 [1955].
[13] T. D. LEE u. G. C. WICK, Nucl. Phys. **B 9**, 209 [1969]; R. E. CUTKOSKY, P. V. LANDSHOFF, D. I. OLIVE u. J. C. POLKINGHORNE, Nucl. Phys. **B 12**, 281 [1969]; H. P. DÜRR u. E. SEILER, Nuovo Cim. **66 A**, 734 [1970]; A. M. GLEESON, R. J. MOORE, H. RECHENBERG u. E. C. G. SUDARSHAN, Phys. Rev. **D 4**, 4 [1971].
[14] E. C. G. SUDARSHAN u. C. A. NELSON, Quantum Field Theories with Shadow States I, II. Preprint CPT 94, 95. Austin, Texas (March 1971).
[15] M. KAROWSKI, Private Mitteilung.

Relativistic, Three-Dimensional Equations for Low-Energy Two-Nucleon Systems

K. ERKELENZ and K. HOLINDE

Institut für Theoretische Kernphysik der Universität Bonn, Bonn, W.-Germany

(Z. Naturforsch. **28 a**, 353--361 [1973]; received 30 December 1972)

Dedicated to Professor KONRAD BLEULER *on the occasion of his sixtieth birthday*

The manifestly covariant Bethe—Salpeter equation is reduced to relativistic, three-dimensional integral equations suitable for the dynamical treatment of the two-nucleon system at low energies. The reduction is achieved by restricting one of the nucleons to the mass shell. The resulting two-nucleon scattering equations and bound state equations are Schrödinger-like field equations containing relativistic kinematical corrections. The transformation of these equations to the ordinary Schrödinger (or Lippmann—Schwinger)-equation is discussed. Intimately connected with the reduction is the derivation of a meson field mediated two-nucleon potential containing meson retardation effects and adequate for the application to the two-nucleon system and nuclear structure problems.

1. Introduction

The purpose of this paper is twofold. We wish to derive from first principles relativistic, three-dimensional off-shell equations for the dynamical treatment of the strongly interacting two-nucleon system at low energies *. The interacting field Hamiltonian appearing in these Schrödinger-like field equations should have the retarded nature of the meson field mediated interactions and must be appropriate for the application in nuclear physics problems.

In order to perform this program we start from the most orthodox, manifestly covariant approach to the relativistic two-body problem in quantum field theory, i. e. the four-dimensional (off-shell) Bethe-Salpeter (BS)-equation [1, 2]. In the low-energy region one expects that the intermediate state nucleons in the BS-equation remain close to their mass-shells. For spinless particles this expectation has been justified to some extent by GROSS [3] who showed that the graphs contributing to low-energy scattering can be well approximated by their positive-energy nucleon poles. Thus, in the low-energy region, it should be a good approximation if we calculate the BS-equation restricting one of the nucleons to its (positive-energy) mass-shell. This requirement reduces the four-dimensional BS-equation to a three-dimensional off-shell equation. The dynamical equation so derived contains relativistic kinematical corrections and, as we want to stress, a meson field mediated inter-

Reprint requests to Dr. K. ERKELENZ, Institut für Theoretische Kernphysik der Universität Bonn, *D-5300 Bonn*, Nußallee 16.

* In a subsequent paper these equations will be used to analyse the low-energy region two-nucleon system.